ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2 - *материјали за 4.5.2020.*

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Данијела Бранковић, danijela@etf.rs

1. ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА (14)

1. Заокружити слова поред тачних тврђења:

а) раван $y+2z+3=0,$ је паралелна са осом Ox;

б) раван $4y+5z=0,$ садржи осу Ox;

в) раван $6x+7=0,$ је паралелна равни yOz;

г) раван $8x=0,$ се поклапа са равни yOz;

д) ниједан од претходних одговора није тачан. ***(септембар 2018.)***

2. Заокружити слова поред тврђења која важе за векторе $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3,$ векторски производ $\times$ и скаларни производ $\circ$:

а) $(\forall\lambda\in\mathbb{R})\,\lambda\left(\vec{a}\circ\vec{b}\right)=-\left(\lambda\vec{b}\right)\circ\vec{a};$

б) $(\forall\lambda\in\mathbb{R})\,\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\left(\lambda\vec{b}\right)\times\vec{a};$

в) $\vec{c}\circ\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=0\Leftrightarrow$ вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c},$ су компланарни;

г) $\vec{a}\times\vec{a}=0;$

д) ниједан од претходних одговора није тачан. ***(септембар 2018.)***

3. Права $p:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ и раван $\alpha:5x-4y+z=-1$:

а) имају тачно једну заједничку тачку;

б) права p припада равни α;

в) немају заједничких тачака;

г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно. ***(јун 2018.)***

4. Дате су равни $\alpha:4x+5y+4sz=1$ и $\beta:3x+2sy+z=7.$ Одредити вредност реалног параметра s тако да равни α и β буду нормалне. $\left(s=-\dfrac{6}{7}\right)$ ***(фебруар 2018.)***

5. Написати једначину равни која садржи тачку $A(2,3,0)$ и нормална је на вектор $\overrightarrow{BC},$ где је $B(1,1,-1)$ и $C(0,0,3).$ $(\alpha:-x-y+4z+5=0)$ ***(октобар 2017.)***

6. У $\mathbb{R}^3$ дата је права $p: \frac{x-0}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0}$ и раван $\alpha: 3x+2y+8=0$. Заокружити слова поред тачних тврђења:

а) права p је паралелна са равни α и са њом нема заједничких тачака;

б) права p припада равни α;

в) права p је нормална на равни α;

г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно. ***(септембар 2017.)***

7. Дате су равни $\alpha: 2x+py+z=3$ и $\beta: 6x+8y+3z=15$. Одредити вредност реалног параметра p, тако да равни α и β буду паралелне. $\left(p=\frac{8}{3}\right)$ ***(јул 2017.)***

8. Дати су вектори $\vec{a}=(-1,0,1), \vec{b}=(2,0,2)$ и $\vec{c}=(-3,5,3)$. Наћи:

а) $\vec{a}\times\vec{b}$; $(0,4,0)$

б) $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$. (20) ***(јун 2017.)***

9. Заокружити слова поред тачних тврђења:

а) ако је $(1,-1,0)$ вектор нормале равни α, онда је раван α паралелна са z–осом;

б) раван xOy је нормална на вектор $(0,0,1)$;

в) раван $z=0$ је нормална на $z-$ осу;

г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно. ***(фебруар 2017.)***

10. Заокружити слова поред тврђења која важе за векторе $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, где је $\times$ векторски производ, а $\circ$ скаларни производ:

а) $\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\circ\vec{c}=\alpha\left(\vec{a}\circ\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b}\circ\vec{c}\right)$;

б) $\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\times\vec{c}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$;

в) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$;

г) ниједно од претходно понуђених тврђења није тачно. ***(октобар 2016.)***

11. Дати су вектори $\vec{a}=(3,0,1)$ и $\vec{b}=(0,4,1)$. Израчунати:

а) $\vec{a}\circ\vec{b}$; (1)

б) $\vec{a}\times\vec{b}$; $(-4,-3,12)$

в) $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right]$. (0) ***(септембар 2016.)***

12. У Еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ одредити једначину равни која садржи тачку $M(-2,7,3)$ и паралелна је равни $\beta: x-4y+5z-1=0$. $(x-4y+5z+15=0)$ ***(јул 2016.)***

13. Дате су тачке $A(2,3,-4)$ и $B(1,0,-1)$.

Одредити $\vec{v_l}$, вектор правца праве l, која пролази кроз тачке A и B. $(1,3,-3)$

Одредити вектор $\vec{u}=(0,p,q)$, $p,q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, који је нормалан на вектор $\vec{v_l}$. $(0,1,1)$ ***(јун 2016.)***

14. За коју вредност реалног параметра t су вектори $\vec{a}=(4,5,1), \vec{b}=(t,-2,1)$ и $\vec{c}=(t,1,0)$ компланарни? $\left(t=\frac{1}{2}\right)$ ***(фебруар 2016.)***

2. ИСПИТНИ ЗАДАЦИ (10)

1. **[8]** Одредити једначину равни α која садржи тачку $T(2,1,-2)$, паралелна је са правом $p: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+5}{1}$ и растојање између праве p и равни α је $\sqrt{2}$.

(Постоје две равни које задовољавају услове задатка: $\alpha_1 : x-z-4=0$ и $\alpha_2 : x-y-1=0$) **(*септембар 2018.*)**

2. **[7]** Одредити вредност реалног параметра λ за коју се праве $p: \frac{x-\lambda}{2}=\frac{\lambda-y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ и $q: \begin{cases} y=2 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ налазе у истој равни. Написати једначину те равни.

$(\lambda=2; \quad -x+z+1=0)$ **(*јун 2018.*)**

3. **[8]** Дата је раван $\beta: 2x+y-3z=14$.

а) Одредити тачку O' симетричну тачки $O(0,0,0)$ у односу на раван β. $\left(O'(4,2,-6)\right)$

б) Одредити једначину праве q симетричну $x-$ оси у односу на раван β. $\left(q: \frac{x-7}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-6}\right)$

(*фебруар 2018.*)

4. **[8]** Дате су тачка $A(1,0,2)$ и права $p: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-1}$.

а) Одредити тачку B симетричну тачки A у односу на праву p. $\left(B(0,-2,1)\right)$

б) Одредити тачку C на правој p тако да троугао ABC буде једнакостраничан.

(Постоје две тачке које задовољавају услове задатка: $C_1(2,-1,0)$ и $C_2(-1,-1,3)$) **(*октобар 2017.*)**

5. **[8]** У $\mathbb{R}^3$ дате су праве $p_1 = \begin{cases} x-y-z+8=0 \\ 5x+y+z+10=0 \end{cases}$ и $p_2 = \begin{cases} x=-11+4t \\ y=13-5t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Тачка O је координатни почетак. Уколико је M тачка пресека датих правих, а M_1, M_2, и M_3, њене пројекције на координатне осе, израчунати:

а) запремину $V_{OM_1M_2M_3}$ тетраедра $OM_1M_2M_3$; $\left(V_{OM_1M_2M_3}=3\right)$

б) површину $P_{M_1M_2M_3}$ троугла $M_1M_2M_3$. $\left(P_{M_1M_2M_3}=\frac{3\sqrt{17}}{2}\right)$ **(*септембар 2017.*)**

6. **[9]** Дата је раван $\alpha: x+y=0$ и праве $p_1: \frac{x}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}$ и $p_2: \begin{cases} x=1 \\ y=z+2 \end{cases}$. Одредити праву p паралелну датој равни, која сече дате праве у тачкама чије је растојање једнако 3. ***(јул 2017.)***

$\left(\text{Постоје две праве које задовољавају услове задатка: } p_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1} \text{ и } p_2: \frac{x-1}{4}=\frac{y-\frac{10}{9}}{-4}=\frac{z+\frac{8}{9}}{7} \right)$

7. **[3+2+2]** У $\mathbb{R}^3$ дате су праве $p_1: \frac{x-2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$ и $p_2: \begin{cases} x-2y-z=5 \\ 3y+z=0 \end{cases}$.

а) Доказати да праве p_1, и p_2 и оса Ox одређују један троугао.

$\left(p_1 \cap p_2 = P(6,-1,3),\ p_1 \cap Ox = P_1(2,0,0),\ p_2 \cap Ox = P_2(5,0,0) \right)$

б) Одредити једначину равни којој припада тај троугао. $\left(3y+z=0 \right)$

в) Израчунати површину тог троугла. $\left(P_{P_1P_2P} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \right)$ ***(јун 2017.)***

8. **[4+3]** У еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ дате су четири тачке $A(1,1,1), B(-2,3,3), C(4,5,3)$ и $D(1,1,2)$. Вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ одређују један паралелепипед. Израчунати:

а) запремину V тог паралелепипеда; $(V=18)$

б) растојање d тачке $B(-2,3,3)$ од равни π која је одређена тачкама $A(1,1,1), C(4,5,3)$ и $D(1,1,2)$. $\left(d=\frac{18}{5} \right)$

(јул 2016.)

9. **[9]** Одредити једначину равни α, која са равни $\beta: x-4y-8z+12=0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву $p: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{-1}$. $\left(\alpha: 7x+8y+7z-23=0 \right)$ ***(октобар 2016.)***

10. **[7]** Дате су права $p: \begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x+y+3z-4=0 \end{cases}$ и права q која је одређена тачкама $A(-2,2,3)$ и $B(4,2,-3)$.

а) Одредити међусобни положај правих p и q. (праве p и q се секу)

б) Написати једначину равни π, која је одређена правама p и q, уколико таква раван постоји.

$\left(\pi: x+y+z=3 \right)$ ***(септембар 2016.)***